

Генерация пространственных тетраэдральных сеток для суперкомпьютерного моделирования обтекания аэрокосмических объектов

Исследование возможностей открытого ПО *Gmsh*

М.К. Ермаков (Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН)

ermakov@ipmnet.ru

Для автоматической генерации сверхподробных тетраэдральных сеток используется открытое ПО *Gmsh*. Пакет позволяет строить пространственные сетки для геометрических моделей, заданных в формате геометрического ядра *OpenCascade* или в формате *STEP*. На персональном компьютере с процессором *Intel i7-9700* время построения сетки объемом в 1 млрд. ячеек не превышает одного часа в параллельном режиме *OpenMP*. Автором были исследованы возможности алгоритмов генерации сетки с точки зрения быстродействия и качества получаемой сетки. В данной статье описан опыт применения пакета для построения пространственных сеток и приведены примеры суперкомпьютерных расчетов обтекания аэрокосмических объектов.

1. Введение

Построение пространственных сеток в автоматическом режиме и сеток сверхвысокого разрешения для суперкомпьютерного численного моделирования – в частности, для моделирования обтекания аэрокосмических летательных аппаратов (ЛА) и объектов, – является актуальной научно-технической задачей. При кажущейся простоте постановки, задача генерации сетки является достаточно сложной и ресурсоемкой даже при использовании простейших пространственных элементов в виде тетраэдров. До недавнего времени программные средства были существенно ограничены как в отношении объема генерируемой сетки, не превышавшего в автоматическом режиме десятков миллионов ячеек, так и в быстродействии.

Программные пакеты, предназначенные для генерации сеток, часто функционируют в связке с системами автоматизированного проектирования, и являются либо частью программных сред (*Ansys*, *Fluent*, *CFX*, *Numeca* и др.), либо представлены в виде отдельных пакетов (*ICEM*, *PointWise*, *Gambit*, *Simmetrix* и др). Современные программные среды типа *Ansys* являются довольно сложными и громоздкими с одной стороны, и довольно дорогостоящими с другой. В связи с этим представляют интерес открытые пакеты и библиотеки программ генераторов сеток: *Gmsh*, *Salome*, *EnGrid*, *Netgen*, *Tetgen*, *CGAL*, *Ani3D* и входящие в *OpenFOAM* программы *BlockMesh*, *PolyDualMesh* и *snappyHexMesh*. Проблемы геометрического моделирования объектов представлены в [1], и генерации сеток, соответственно, в [2–4].

В связи с тенденцией замещения коммерческих зарубежных продуктов в России были исследованы

открытые (*Open-Source*) программные продукты для построения тетраэдральных пространственных сеток, допускающие генерацию в полностью автоматическом режиме. Использование в суперкомпьютерных вычислениях ПО с открытым кодом является вполне стандартным подходом. Лидирующие современные открытые пакеты, на разработку которых были затрачены десятки человеко-лет, являются вполне конкурентоспособными при сравнении с коммерческими продуктами и дают возможность новым разработчикам использовать уже накопленный потенциал ПО.

Опыт работы с открытыми пакетами генерации сеток показывает, что они могут вполне успешно применяться для автоматического создания пространственных сеток при исследовании обтекания объектов сложной формы. В данной работе представлен опыт использования пакета *Gmsh*, являющегося, по мнению автора, одним из наиболее функциональных и производительных среди генераторов неструктурированных тетраэдральных сеток с открытым кодом.

2. Общее описание открытого пакета *Gmsh*

Программный комплекс *Gmsh* (версия 4.8.0) [5–7] предназначен для автоматической генерации неструктурированных поверхностных и пространственных сеток для геометрических объектов, заданных граничными поверхностями. Набор поверхностей задается как на основе собственного упрощенного геометрического ядра, так и на основе геометрического ядра и программных средств *OpenCascade*. Система *Gmsh* представляет собой интерактивную среду, включающую геометрический модуль в виде упрощенной подсистемы САПР, модуль генерации сеток и модуль визуализации конечно-элементных данных. Развитые возможности открытой системы *OpenCascade* позволяют использовать богатый арсенал функций геометрического ядра: широкий набор примитивов поверхностей и объемов, набор булевых операций над геометрическими объектами, параметризацию и документирование процесса построения объекта и создаваемой сетки в виде текстового скрипта, импорт и экспорт геометрии в стандартных форматах.

Помимо генерации поверхностных треугольных сеток пакет *Gmsh* поддерживает преобразование треугольных поверхностей сеток в сетки с преимущественно четырехугольными элементами, а также построение на их основе призматических элементов при преобразовании выталкивания

(вытягивания, экструзии) геометрии и сетки. Сетки, однако, в любом случае остаются неструктурированными.

Набор алгоритмов построения сеток базируется на сочетании метода Делоне, метода продвигаемого фронта и методов разбиения и перестроения сетки [2]. Эти методы характеризуются различной степенью качества построения сетки, различным быстродействием и степенью надежности (робастности, безотказности), обозначающей возможности создания сетки для сложных геометрических объектов. Поддерживается генерация адаптивных сеток.

Пакет *Gmsh* написан полностью на алгоритмическом языке *C++* и может функционировать как в интерактивном, так и в пакетном режиме (командной строки) под управлением операционных систем *Windows/Linux/MacOS*. Отрытый код содержит порядка 500 тыс. строк исходного текста. Прикладной программный интерфейс (*API*) с подключением библиотек делает возможности пакета доступными для программ, написанных на алгоритмических языках *C/C++*, *Python* и *Julia*. Разработанная учеными и программистами для собственного использования система *Gmsh* удачно сочетает функциональность и удобство работы. Пакет активно развивался в течение 20 лет и продолжает развиваться, он имеет подробную документацию с примерами и поддержку пользователей и разработчиков. О популярности пакета свидетельствуют примерно 8000 загрузок в месяц с сайта gmsh.info и 500 цитирований в год в специальной литературе.

3. Методы построения и оптимизации сеток в *Gmsh*

В качестве исходных данных для построения сетки используется геометрическая модель объекта, заданная встроенным языком *Gmsh*, средствами геометрического ядра *OpenCascade* или импортируемая в формате *STEP*. Для задания локального размера создаваемой сетки может понадобиться несколько подходов. При первом подходе создается сетка, близкая к равномерной, с указанием минимального и максимального размеров сетки. При втором подходе каждой точке (вершине) топологии геометрического объекта приписывается дополнительный параметр, определяющий локальный линейный размер сетки. На топологических элементах объекта локальный линейный размер элементов интерполируется линейной функцией. Помимо задания линейного размера сетки, можно ограничить величину шага сетки по угловому размеру в соответствии с кривизной текущего элемента. Третий подход заключается в указании дополнительных областей простой формы (шар, параллелепипед),

в которых задается локальный линейный размер сетки.

После задания локального шага система последовательно, по командам пользователя, строит одномерную сетку вдоль ребер объекта (*1D*), двумерную сетку на поверхностях объекта (*2D*) и трехмерную сетку внутри объемов объекта (*3D*). По желанию пользователя каждая сетка может визуализироваться в виде элементов, таких как вершины, ребра, грани и тетраэдры (с их номерами или без номеров). Возможна и визуализация отдельных элементов или их групп, относящихся к любому виду элементов топологии. После этапа генерации двумерной сетки можно улучшить её качество: число итераций сглаживания задается. После этапа построения трехмерной сетки её можно оптимизировать с целью улучшения качества элементов.

В качестве алгоритмов построения тетраэдральной пространственной сетки используются *3D*-варианты метода Делоне для алгоритмов *Delaunay* [8, 9] и *HXT* [6], метод продвигаемого фронта *J. Schöberl* для алгоритма *Frontal* [10]. Собственные средства *Gmsh* для оптимизации тетраэдральных сеток основываются на перестановках ребер и граней с перемещением вершин [5]. Подключаемая библиотека оптимизации *Netgen* основана на сочетании локального метрического сглаживания и топологических преобразований [10].

4. Практика работы с пакетом *Gmsh*

4.1. Интерактивный режим

Внешний вид системы в интерактивном режиме со стандартным меню приложения и вертикальным меню древовидной структуры, геометрией объекта, представленной ребрами, и поверхностной сеткой летательного аппарата *X-43* представлен на рис. 1. Стандартное горизонтальное меню позволяет изменять многочисленные параметры системы в открываемых диалоговых панелях. Благодаря горизонтальному меню, возможен выбор параметров

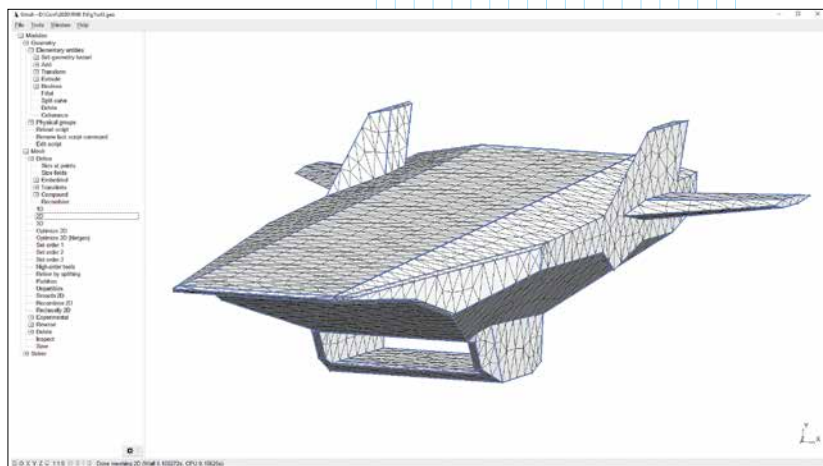


Рис. 1. Графическая оболочка *Gmsh* с развернутым древовидным меню (слева) и изображением поверхностной треугольной сетки летательного аппарата *X-43*

сгущения сетки, алгоритмов построения поверхностной и пространственной сеток, параметров визуализации элементов сетки, данных об использовании ресурсов для построения сетки и пр. Вертикальное меню в левой части окна предоставляет средства для взаимодействия с моделью – в частности, набор выполняемых действий (команд). В графическом окне системы представлены ребра геометрии объекта и поверхностная сетка.

Для наглядности в нашем случае выбрана сетка с малым количеством элементов на поверхности и не отображается область обтекания вокруг ЛА. В строке статуса обозначены выполненная операция (построение двумерной сетки) и время её выполнения. Контролировать действия в процессе выполнения операций можно с помощью окна сообщений, в котором будет выводиться информация о ходе генерации сетки для элементов объекта.

4.2. Пакетный режим (режим командной строки)

Неинтерактивный режим, реализуемый с помощью командной строки, позволяет минимально задействовать дополнительные ресурсы и работать в пакетном режиме. Параметры алгоритмов и выполняемые команды задаются в загружаемом текстовом скрипте с расширением *.geo* и в параметрах командной строки при запуске *Gmsh*. Построение и оптимизация сеток в данном режиме происходят полностью автономно.

4.3. Создание параметрической геометрической модели и генерация сетки

Система *Gmsh* имеет свою подсистему *CAD*, которая позволяет выполнять базовые операции по созданию и модификации геометрических объектов, опираясь на собственный язык для таких операций. При этом используется либо собственное геометрическое ядро, либо открытое геометрическое ядро *OpenCascade*; последнее необходимо при наличии операций со сплайнами или булевых операций над телами. Существенным преимуществом применения языка для описания сценариев

геометрических операций и построения сетки является возможность хранения и редактирования такого сценария в текстовом виде. Этот язык обеспечивает создание простых геометрических объектов, поворот объекта под углом атаки и создание области обтекания для выбранных параметров набегающего потока.

Пример области обтекания затупленного по сфере конуса и построенная поверхностная сетка на граничных поверхностях задачи представлены на **рис. 2**. Чтобы исследовать возможности пакета, весь набор имеющихся в его составе алгоритмов тестировался с точки зрения качества получаемой сетки, быстродействия и использования оперативной памяти.

Для генерации поверхностной сетки предлагаются три алгоритма: *MeshAdapt*, *Delaunay* и *Frontal-Delaunay*. Наиболее предпочтительным для сложных поверхностей считается алгоритм *MeshAdapt*, наиболее быстрым – *Delaunay*, а генерирующим наиболее качественную сетку – *Frontal-Delaunay*. Опыт применения подтвердил, что *Delaunay* действительно является самым быстрым из них, в то время как другие два алгоритма могли существенно замедляться на отдельных поверхностях.

Для генерации трехмерных сеток также используются три алгоритма: *Delaunay*, *Frontal* и *HXT*.

Алгоритм *Delaunay* считается наиболее безотказным, а алгоритм *HXT* – наиболее быстрым, являясь новой эффективной реализацией параллельного алгоритма *Delaunay*.

Оценки производительности алгоритма *HXT* при построении равномерной двумерной и трехмерной сеток для затупленного по сфере конуса в зависимости от линейного размера ячеек представлены в **табл. 1**. Операции построения осуществлялись для сеток объемом от 0.9 до 102.9 млн. ячеек на ПК с процессором *Intel i7-9700*. Время, необходимое только для генерации трехмерной сетки с 3 млн. ячеек составляет примерно 10 секунд, а для сетки в 100 млн. ячеек – менее 5 минут. Приведенные значения времени относятся к вычислениям

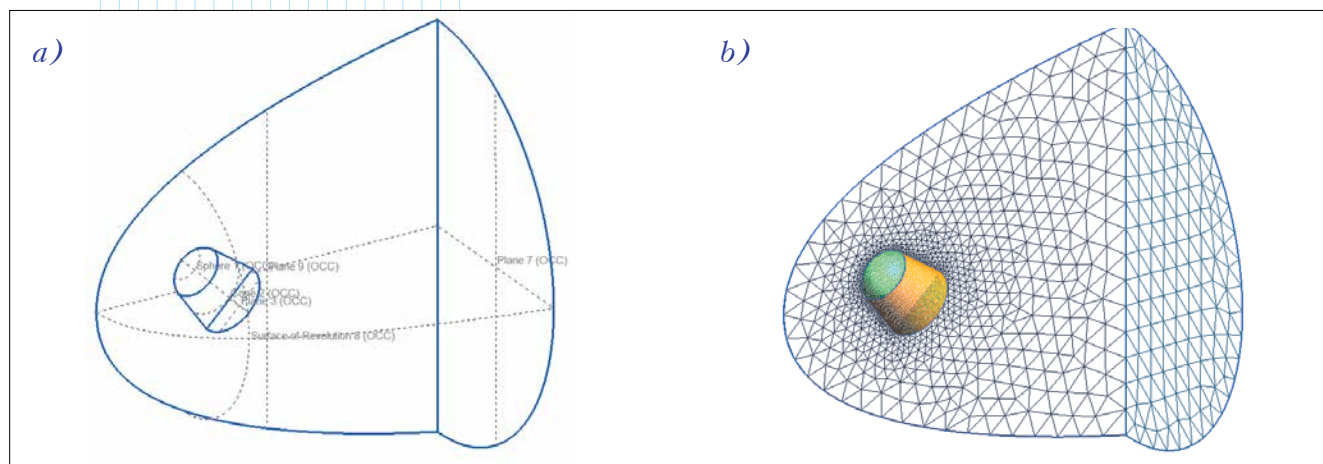


Рис. 2. Область обтекания затупленного конуса под углом атаки (а) и сгенерированная поверхностная сетка (б)

Табл. 1. Объем тетраэдральной сетки и время генерации поверхностной и объемной сетки в зависимости от линейного размера

Линейный размер	Объем сетки, млн. ячеек	Время для 2D, сек	Время для 3D, сек
0.030	0.9	1.7	2.2
0.020	2.8	3.8	6.2
0.010	22.6	16.6	45
0.008	44.7	27	85
0.006	102.9	49	202

на одном ядре процессора. Объем требуемой для генерации этих сеток оперативной памяти не превышает 16 GB.

Столь же успешно система *Gmsh* генерирует сетки для обтекания ЛА, характеризующихся сложной геометрией поверхности. Примером такого ЛА является *X-43*, грубая поверхностная сетка для которого представлена на [рис. 1](#).

Успешное построение расчетной сетки возможно при корректном задании геометрии и топологии рассматриваемой модели области и при отсутствии у модели слишком малых геометрических линейных и угловых размеров. Примеры обтекания аэрокосмических объектов – ЛА *X-33* и *Space Shuttle* представлены на [рис. 3, 4](#). В этих случаях в

систему загружалась геометрическая модель в формате *STEP*, а область обтекания вокруг объектов формировалась средствами *Gmsh*. Сетки строились неравномерными – для обеспечения сгущений в областях высоких градиентов решения. Кроме того, неравномерность позволила существенно уменьшить объем сетки.

4.4. Оценка качества генерируемых сеток

Продолжим сравнение различных методов генерации сеток, дополнив его исследованием качества полученных сеток.

Для оценки качества сетки был написан небольшой программный код. В качестве критерия качества элемента сетки рассматривается параметр

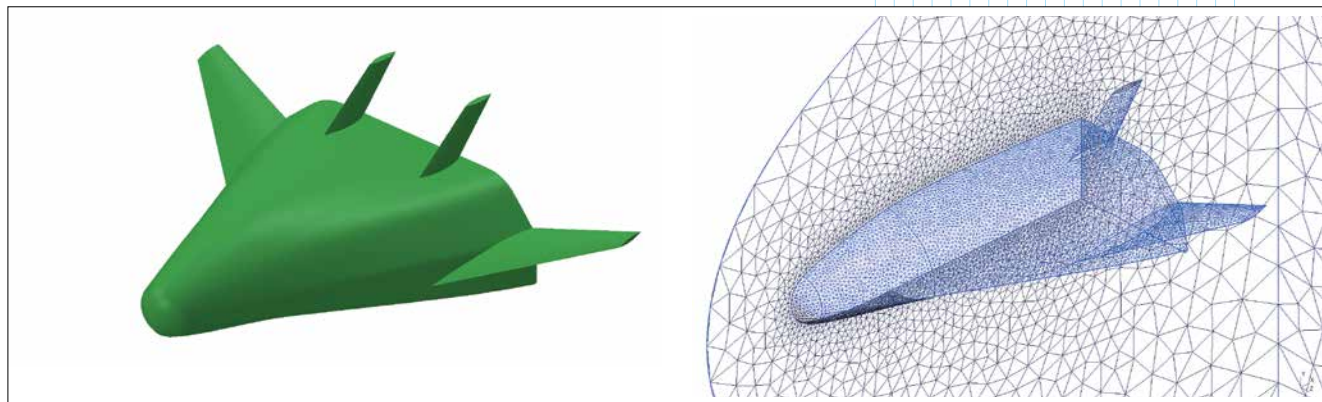


Рис. 3. Геометрическая модель X-33 и сгенерированная поверхностная сетка области обтекания

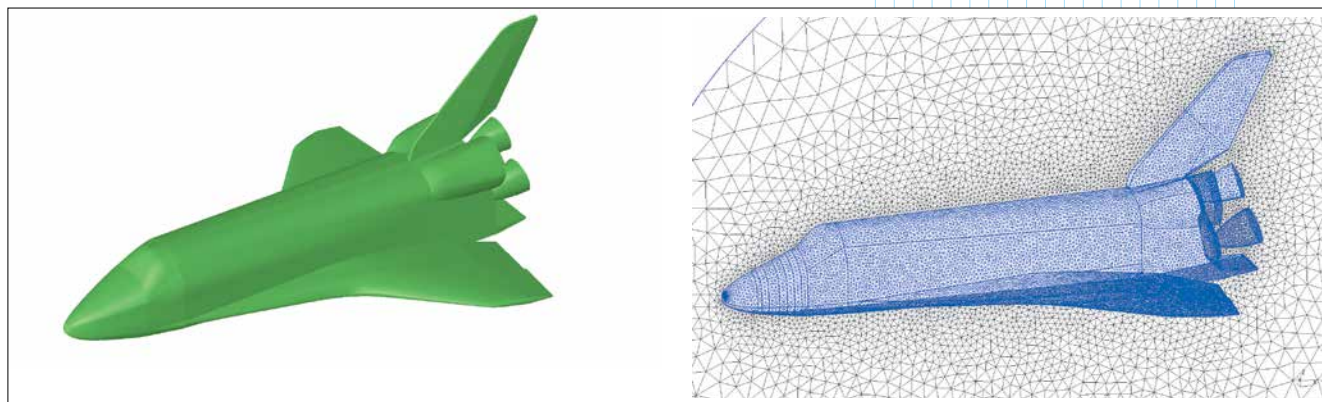


Рис. 4. Геометрическая модель Space Shuttle и сгенерированная поверхностная сетка области обтекания

качества q , равный умноженному на 3 отношению радиуса вписанной в тетраэдр сферы (r) к радиусу описанной сферы (R):

$$q = 3r/R. \quad (1)$$

Этот параметр не превышает единицы для любых тетраэдров, причем значения единицы он достигает для тетраэдра, у которого все ребра (и, соответственно, грани) равны между собой. Радиусы вписанной в тетраэдр и описанной сферы вычисляются по формулам:

$$r = 3V/(S_1 + S_2 + S_3 + S_4), \quad (2)$$

$$R = S_{tria}/(6V), \quad (3)$$

где V – это объем тетраэдра (1/6 смешанного произведения векторов, исходящих из одной вершины), S_1, S_2, S_3 и S_4 – площади граней тетраэдра; S_{tria} – площадь треугольника со сторонами $a_{12}, a_{34}, a_{13}, a_{24}, a_{14}, a_{23}$ (здесь a_{ij} – длина ребра, соединяющая вершины i и j тетраэдра).

Площадь треугольника S со сторонами a, b и c может быть вычислена по формуле Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad (4)$$

где $p = (a+b+c)/2$ является половиной периметра треугольника.

Для оценки качества будем рассматривать распределение параметра качества q по удельному весу ячеек. Чем больше вес ячеек с высоким качеством, тем больше кривая распределения сдвигается в сторону значения аргумента $q=1$. Диаграммы распределения качества тетраэдров после генерации равномерной сетки всеми тремя методами без оптимизации представлены на рис. 5а, а после генерации сетки методом *Delaunay* с оптимизацией *gmsh* и *netgen* и генерации сетки методом *HXT* с оптимизацией *hxt* с параметрами 0.3 и 0.45 – на рис. 5б.

Чтобы провести более детальный анализ генерируемых сеток, дополнительно введем в рассмотрение значения минимального q_{min} и среднего q_{ave} значений параметра качества. В табл. 2 представлены значения указанных параметров для сеток со

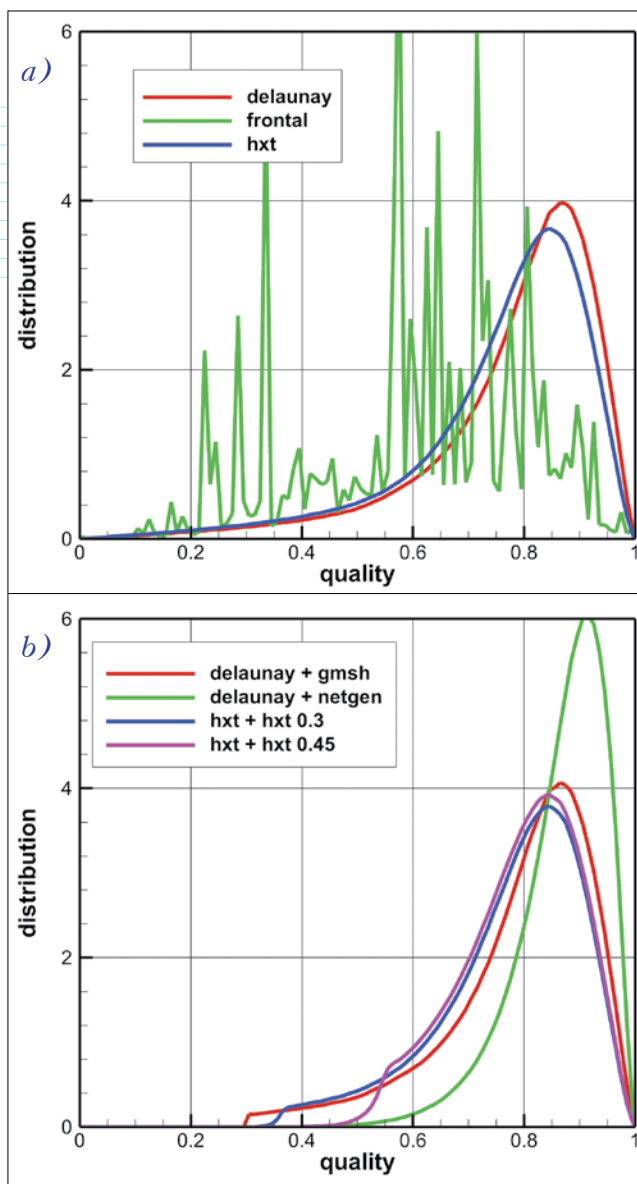


Рис. 5. Распределение функции качества сетки q для алгоритмов без оптимизации (а) и алгоритмов *Delaunay* и *HXT* с оптимизацией (б)

Табл. 2. Характеристики тетраэдральных сеток со сгущением в зависимости от используемых алгоритмов генерации и оптимизации сеток

Алгоритм	Оптимизация	Время, сек	Сетка, млн. ячеек	q_{min}	q_{ave}
<i>Delaunay</i>		120	6.2	0.828×10^{-3}	0.779
	<i>gmsh</i>	+16	6.1	0.197	0.791
	<i>netgen</i>	+478	4.8	0.201	0.867
<i>Frontal</i>		263	4.1	0.352×10^{-7}	0.609
	<i>gmsh</i>	+23.6	3.9	1.587×10^{-2}	0.641
	<i>netgen</i>	+210	2.6	0.202	0.835
<i>HXT</i>		19.8	10.0	0	0.758
	<i>hxt 0.3</i>	+1.4	9.7	0.195	0.776
	<i>hxt 0.45</i>	+39	9.4	0.206	0.791

сгущением, полученные для различных алгоритмов генерации трехмерной сетки и оптимизации.

Размер генерируемой сетки варьируется от 2.6 до 10 млн. ячеек. Для всех трех алгоритмов минимальное значение параметра качества q без использования оптимизации мало, а для алгоритма *HXT* – практически равно нулю. Вместе с тем, среднее значение параметра q , согласно рис. 5 и табл. 2, остается приемлемым и без оптимизации. Как следует из анализа рис. 5, применение оптимизации *gmsht* выглядит подобно эффективному обрезанию распределения качества для значений ниже 0.3 (красная кривая), а применение оптимизации *netgen* – эффективному обрезанию для значений ниже 0.5 с одновременным сдвигом в сторону высоких q (зеленая кривая). Однако оптимизация *netgen* требует затрат времени, существенно превышающих продолжительность генерации сетки без оптимизации. Применение оптимизации *hxt*, доступной только для алгоритма генерации сетки *HXT*, подобно эффективному обрезанию распределения параметра q ниже значений 0.3 (синяя кривая) и 0.45 (фиолетовая кривая) при значениях параметра оптимизации 0.3 и 0.45, соответственно. Однако оптимизация с параметром 0.45 занимает существенно больше времени.

Глобальный вывод из анализа данных рис. 5 и табл. 2 состоит в том, что комбинация алгоритма генерации трехмерной сетки *HXT* и одноименной оптимизации позволяет получить не менее качественную сетку, чем в случае применения остальных алгоритмов. При этом указанная комбинация более чем на порядок превосходит их по скорости построения сеток. Следует, однако, отметить, что сетки, построенные с использованием алгоритма *Frontal* и оптимизацией *netgen*, могут оказаться более качественными, чем построенные с помощью более быстрого алгоритма *HXT*.

4.5. Исследование параллельного метода генерации сетки

Достоинство новой реализации метода Делоне в алгоритме *HXT* состоит в возможности использования параллельного режима *OpenMP*. Для этого

необходимо перекомпилировать и пересобрать пакет *Gmsh* с ключом *ENABLE_OPENMP* согласно указаниям в документации пакета. В связи с тем, что “родной” для сборки пакета является *Linux*-подобная среда, в нашем случае это было сделано на компьютере с ОС *Ubuntu 18.04 LTS* и установленным пакетом *OpenCascade*.

При использовании двух ядер ускорение составило 1.4 раза, при использовании четырех ядер – 1.9 и при использовании восьми – 2.4 раза. Невысокое значение ускорения объясняется наличием непараллелизуемых “накладных расходов” – затрат времени, связанных с подготовкой данных и оптимизацией сетки. Ожидается, что разработчики пакета улучшат эффективность распараллеливания в следующих версиях.

Помимо прочего, автором была проверена работоспособность пакета на суперкомпьютере “Ломоносов”.

5. Параллельное моделирование обтекания

Дополнительно, в том числе для демонстрации корректности построенных тетраэдральных сеток, приведем результаты суперкомпьютерного математического моделирования обтекания ЛА *X-33* с использованием вычислительного кода на основе уравнений Эйлера [11].

Моделирование обтекания ЛА является конечным шагом в цепочке проектирования: создание геометрии объекта, генерация неструктурированной тетраэдральной сетки, моделирование обтекания объекта. При разработке параллельного пакета для моделирования внешнего обтекания был выбран слабоинвазивный подход: при распараллеливании вычислительная часть алгоритма не подвергалась модификации, а все дополнения, связанные с межпроцессорными обменами и синхронизацией, выполнялись до и после вычислительной части кода.

В нашем случае (рис. 6) для моделирования обтекания ЛА *X-33* были выбраны следующие значения: величина числа Маха набегающего потока равна 6 на высоте $H=30$ км при угле атаки

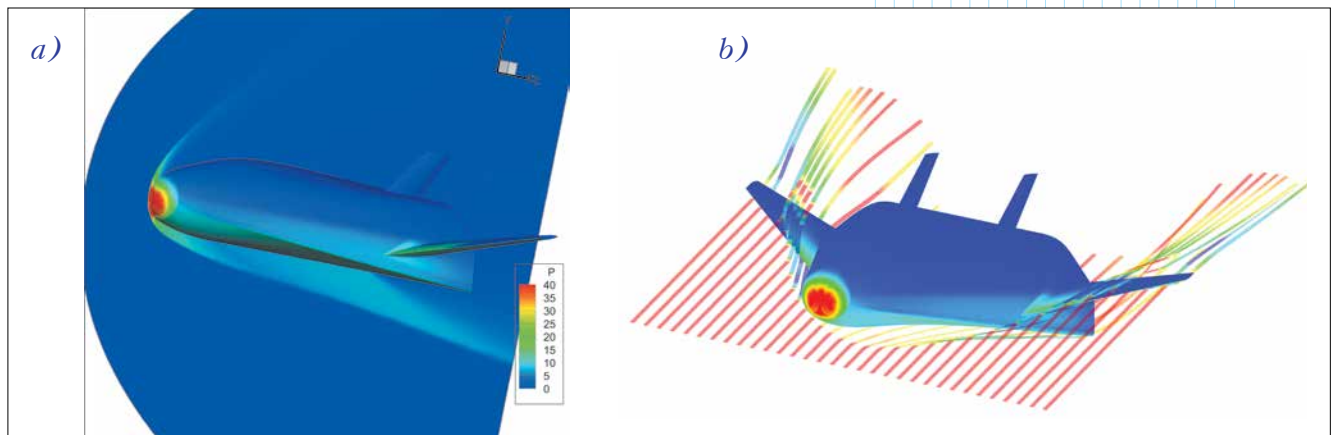


Рис. 6. Обтекание *X-33* при числе Маха равном 6 и угле атаки 20° :

- a) распределение давления на поверхности ЛА и в плоскости симметрии;
b) распределение давления на поверхности ЛА и траектории движения набегающего потока, “подкрашенные” поступательной компонентой скорости

20 градусов. Расчет осуществлялся на основе уравнений Эйлера по схеме С.К. Годунова второго порядка точности с использованием локального шага по времени вплоть до момента установления “стационарного” режима обтекания. Моделирование проводилось на СК “Ломоносов” на сетке в 30 млн. ячеек с распараллеливанием на 8 процессоров.

На **рис. 6а** представлена общая картина ударно-волновой структуры течения в виде распределения давления на поверхности обтекаемого объекта и в плоскости симметрии. Хорошо заметны зоны повышенного давления в лобовой части ЛА в области его встречи с набегающим потоком и на элементах оперения. В плоскости симметрии обтекания ЛА видны скачки уплотнения и волна разрезания в районе нижней донной части корпуса.

На **рис. 6б** дополнительно представлены траектории движения набегающего потока в плоскости его пересечения с боковым оперением. При встрече набегающего потока с корпусом ЛА под углом атаки поток резко уходит вниз, приобретая поперечную компоненту скорости на его периферии. За счет вытеснения потока на периферии корпуса часть его выдавливается вверх и проходит над крылом, в то время как более удаленная часть набегающего потока проходит под крылом. Цвет траекторий обозначает поступательную компоненту скорости.

Качественно правильное моделирование обтекания подтверждает корректность построения пространственной тетраэдральной сетки.

Заключение

Преимуществом неструктурированных тетраэдральных сеток является возможность их генерации в полностью автоматическом режиме. Это крайне важно при построении сеток для оперативных расчетов обтекания летательных аппаратов и других объектов, обладающих сложной геометрией. В связи с курсом на импортозамещение для промышленности и развитие новых технологий, автором исследовался пакет программ *Gmsh* – один из наиболее продвинутых пакетов с открытым кодом, предназначенных для генерации неструктурированных тетраэдральных сеток. С его помощью было построено большое число расчетных сеток для сложных моделей аэрокосмических объектов с размерностью вплоть до миллиарда ячеек, причем результаты были получены на ПК и за разумное время. Были опробованы все алгоритмы построения тетраэдральных сеток, адаптации и оптимизации и подготовлены рекомендации по их использованию. Кроме того, изучалось качество генерируемых сеток и возможность ускорения их генерации за счет многоядерных вычислений *OpenMP*.

Как показало исследование, наиболее эффективным оказался новый метод генерации трехмерных сеток *HXT* с его встроенными средствами оптимизации, позволяющий быстро строить неравномерные сетки объемом до 100 млн. ячеек, затратив на это до 10 минут на высокопроизводительном ПК.

Дополнительно было проведено суперкомпьютерное моделирование обтекания ЛА X-33 при высоких

числах Маха под разными углами атаки, для чего были задействованы ресурсы суперкомпьютерного комплекса МГУ имени М.В. Ломоносова [12].

Данная статья представляет собой обзор публикаций [13, 14], написанный по предложению редакции. 🍷

Литература

1. Голованов Н.Н. Геометрическое моделирование. Москва: КУРС, 2016.
2. Лисейкин В.Д. Методы построения разностных сеток. Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 2014.
3. Василевский Ю.В., Данилов А.А., Липников К.Н., Чугунов В.Н. Автоматизированные технологии построения неструктурированных расчетных сеток. Москва: Физматлит, 2016.
4. Суков С.А. Методы генерации тетраэдральных сеток и их программные реализации // Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша, 2015, № 23, 22 с.
5. Geuzaine C., Remacle J.F. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009, Vol. 79, No 11, pp. 1309–1331.
6. Marot C., Pellerin J., Remacle J.F. One machine, one minute, three billion tetrahedral // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2019, Vol. 117, No 9, pp. 967–990.
7. A three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities // <http://gmsh.info>
8. Si H. TetGen. A delaunay-based tetrahedral mesh generator // ACM Transactions on Mathematical Software, 2015, Vol. 41, No 2, Article 11, pp. 1–36.
9. Si H. TetGen, A Quality Tetrahedral Mesh Generator and Three-Dimensional Delaunay Triangulator, 2006 // www.wias-berlin.de/software/tetgen/files/tetgen-manual.pdf
10. Schöberl J. NETGEN. An advancing front 2d/3d-mesh generator based on abstract rules // Computing and Visualization in Science, 1997, Vol. 1, No 1, pp. 41–52.
11. Ermakov M.K., Kryukov I.A. Supercomputer modeling of flow past hypersonic flight vehicles // Journal of Physics: Conference Series, 2017, Vol. 815, 012016.
12. Воеводин В.В., Жуматий С.А., Соболев С.И., Антонов А.С., Брызгалов П.А., Никитенко Д.А., Стефанов К.С., Воеводин Вад.В. Практика суперкомпьютера “Ломоносов” // Открытые системы, 2012, № 7, с. 36–39.
13. Ермаков М. К., Крючкова А. С. Генерация неструктурированных тетраэдральных сеток для обтекания летательных аппаратов на основе открытых пакетов // Физико-химическая кинетика в газовой динамике, 2020, т. 21, вып. 2.
14. Ермаков М.К. Генерация тетраэдральных сеток для суперкомпьютерного моделирования обтекания аэрокосмических объектов // Вычислительные методы и программирование, 2020, т. 21, с. 341–349.