

Прямое численное моделирование турбулентных течений с помощью CFD-пакета STAR-CCM+

А.А.Игнатъев, О.И.Симакова, Р.А.Шарапов, ОАО "АТОМПРОЕКТ" (Санкт-Петербург)

1. Описание проблемы

Пакет STAR-CCM+ обладает широкими возможностями расчета турбулентных течений с привлечением различных RANS и LES турбулентных моделей. Однако, в некоторых случаях для решения технических задач оказывается полезным использование прямого численного моделирования турбулентности (Direct Numerical Simulation – DNS) в силу того, что использование RANS (осредненных по Рейнольдсу) моделей турбулентности (и в меньшей степени LES (вихреразрешающих моделей)) приводят к некоторой неопределенности результатов вследствие того, что они содержат набор полуэмпирических констант. Прямое численное моделирование свободно от такой неопределенности, так как основано только на физических принципах без привлечения полуэмпирических данных. Это может оказаться актуальным в некоторых случаях – например, в расчетах естественной конвекции с небольшим числом Рейнольдса, где всегда имеет место ламинарно-турбулентный переход.

В DNS-расчетах для получения реалистичных результатов важно, чтобы численный алгоритм решения уравнений динамики жидкости обладал следующими двумя свойствами:

- 1) низкая численная вязкость;
- 2) высокая точность сохранения кинетической энергии в бездиссипативном течении [7].

Эти требования следуют из того факта, что турбулентное течение можно рассматривать как процесс каскадной передачи кинетической энергии турбулентных пульсаций от больших масштабов к меньшим. При этом кинетическая энергия турбулентности в таком каскадном процессе сохраняется и диссипирует в тепло лишь на самом маленьком (колмогоровском) масштабе λ_0 , который равен [2]:

$$\lambda_0 = (\nu^3 / \varepsilon)^{1/4} \quad (1)$$

где ν – кинематическая вязкость и ε – скорость диссипации кинетической энергии турбулентных пульсаций.

Для выполнения этих условий обычно используют алгоритмы, использующие смещенные (staggered) сетки, позволяющие сохранять кинетическую энергию с высокой точностью [7, 9]. Так как в STAR-CCM+ используются смещенные (collocated) сетки, то для применения DNS-расчетов предварительно необходимо провести проверку, насколько точно солвер STAR-CCM+ может сохранять кинетическую

энергию в бездиссипативном течении несжимаемой жидкости. С этой целью был проведен нестационарный 2D-расчет невязкого вихревого течения в квадрате со стороной 2π с периодическими граничными условиями. Для удовлетворения приведенным выше условиям в этом расчете использовалась обобщенная разностная схема (generalized scheme) второго порядка точности по времени и по пространству. Начальные условия задавались в виде [8]:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sin(x)\cos(y) \\ v(x, y) &= -\cos(x)\sin(y) \\ p(x, y) &= (\cos(2x) - \cos(2y))/4 \end{aligned} \quad (2)$$

где u , v – горизонтальная и вертикальная компоненты скорости, p – давление.

Решение (2), представляющее собой 4 вихря, удовлетворяет стационарным уравнениям Эйлера, поэтому в течение некоторого времени счета решение оставалось практически неизменным. Соответственно, достаточно точно сохранялась и суммарная кинетическая энергия:

$$K = 1/(2\Omega_\Sigma) \sum (u_i^2 + v_i^2)\Omega_i \quad (3)$$

где Ω_i и Ω_Σ – объем i -той ячейки и суммарный объем всех ячеек.

Так как рассматриваемое течение невязкое, то оно неустойчиво; поэтому, по прошествии достаточно длительного времени вихри должны терять устойчивость и распасться на более мелкие нестационарные вихри – течение должно становится турбулентным. Правильное моделирование этого каскадного процесса передачи по масштабам кинетической энергии турбулентных пульсаций важно с точки зрения применения DNS. Для этой задачи был проведен ряд тестов на сетке 40×40 ячеек с шагом по времени 0.001 с. Тесты показали, что распад вихрей наблюдается только при использовании строго центрально-симметричной схемы с весовым коэффициентом обобщенной схемы $\alpha = 1$. Если же используется обобщенная схема с небольшой противопоточностью (upwinding), например, $\alpha = 0.95$, то распад вихрей не наблюдается и течение остается стационарным, что, очевидно, объясняется слишком большой схемной вязкостью во втором случае (рис. 1).

На рис. 2 показаны линии тока в различные моменты времени, полученные в расчете с $\alpha = 1$.

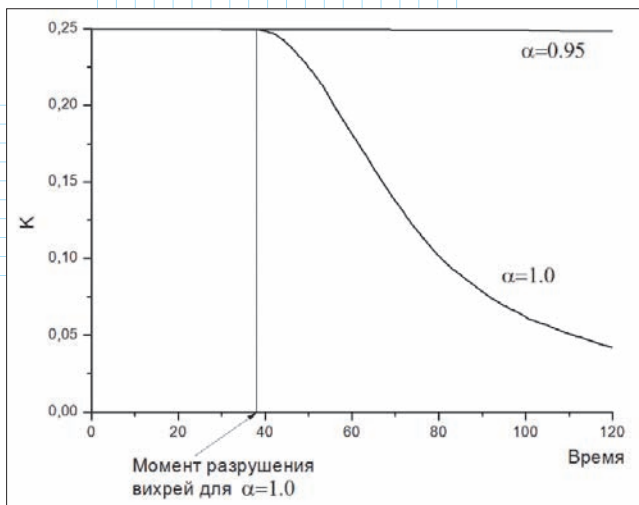


Рис. 1. Эволюция кинетической энергии в расчете распада 2D-вихрей

Как можно видеть из рис. 1, точность сохранения суммарной кинетической энергии падает после начала распада вихрей. Однако, из этого еще нельзя сделать вывод о непригодности солвера STAR-CCM+ для DNS-расчетов, так как сам процесс распада вихрей всё же разрешается успешно, а некоторая потеря кинетической энергии может лишь сказаться на точности решения. Как показали дальнейшие эксперименты, этот недостаток, действительно, не оказал принципиального влияния на результаты расчетов.

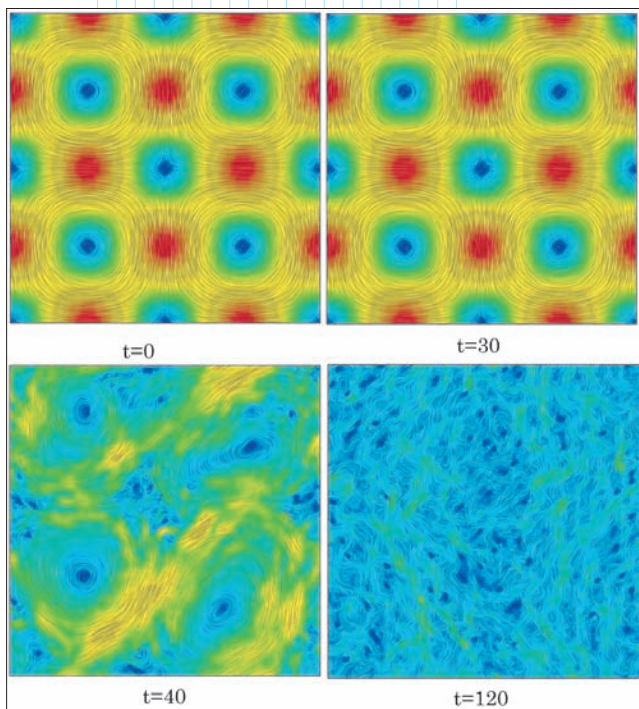


Рис. 2. Линии тока в расчете распада 2D-вихрей в различные моменты времени

DNS-моделирование также предъявляет особые требования к выбору сетки. Поскольку в расчете необходимо явно разрешить все масштабы турбулентных пульсаций, от самых больших (порядка характерного размера течения L) до самых маленьких, порядка λ_0 , то характерный размер ячейки сетки Δ должен удовлетворять условию:

$$\Delta/\lambda_0 \approx 1 \quad (4)$$

Здесь сделаем следующее замечание. Из соображений размерности можно показать, что [2]:

$$\lambda_0 \approx \frac{L}{Re^{3/4}} \quad (5)$$

Если обозначить число ячеек сетки по одному координатному направлению через N , то, с учетом того, что $\Delta = L / N$, из (4) и (5) получаем:

$$N^3 \approx Re^{9/4} \quad (6)$$

Соотношение (6) показывает, что общее число ячеек сетки быстро растет с ростом числа Рейнольдса. Именно по этой причине DNS применим на практике только для невысоких чисел Re (как правило, до 10^4), даже с учетом быстрого развития вычислительной техники. Как показали наши эксперименты, условие (4) удается выполнить в расчетах на сетках, содержащих порядка 50÷100 млн. ячеек для задач свободной конвекции с числами Релея до $10^{11} \div 10^{12}$ на многопроцессорном кластере. Время счета до выхода на квазистационарный режим в наших расчетах составляло несколько десятков часов на 200 процессорах с физическим шагом по времени 1 мс, что потребовало несколько десятков тысяч итераций.

В расчетах параметр Колмогорова (4) вычислялся непосредственно. При этом скорость диссипации кинетической энергии ε в формуле (1) рассчитывалась по формуле:

$$\varepsilon = -\nu/2 \overline{(\partial V'_i/\partial x_k + \partial V'_k/\partial x_i)^2} \quad (7)$$

где V'_i – пульсационная составляющая i -той компоненты скорости, которая рассчитывалась с помощью средств формирования мониторов и отчетов пакета STAR-CCM+. В формуле (7), как обычно, предполагается суммирование по повторяющимся индексам, а верхняя черта означает осреднение по времени. В следующих разделах приведены результаты тестовых DNS-расчетов.

2. Турбулентное течение в канале: сравнение с другим расчетом

В данном разделе приведены результаты DNS-расчета турбулентного изотермического течения в канале прямоугольного сечения. Аналогичный расчет опубликован в литературе и часто используется для сравнения [6].

Табл. 1. Параметры DNS-расчета для канала

Полувысота (y)	$\delta = 0.01\text{ м}$, граничные условия: прилипание
Длина (x)	$4\pi\delta$, граничные условия: периодические
Ширина (z)	$2\pi\delta$, граничные условия: периодические
Сетка	$192 \times 129 \times 160$ ячеек в направлениях x, y, z Неоднородная сетка в y -направлении: $y_j = \delta \left[1 - \cos \left(\frac{(j-1)\pi}{N_y - 1} \right) \right], j = 1..N_y$
Постоянная плотность	$\rho = 1 \text{ кг/м}^3$
Постоянная вязкость	$\mu = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ Па}\cdot\text{с}$
Динамическая скорость	$u_\tau = \frac{Re_\tau \mu}{\rho \delta} = 0.324 \text{ м/с}$
Постоянный градиент давления, как источник уравнения x -импульса, уравновешивающий силы трения.	$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{u_\tau^2}{\delta} = 10.4976 \text{ Н/м}^3$
Начальные условия для скорости	$u_x = 5, u_y = 0, u_z = 0 \text{ м/с}$ Начальных возмущений не задавалось
Физика модели STAR-CCM+	Ламинарная, сегрегационная, постоянная плотность
Солвер	Неявный, нестационарный, 2-го порядка точности по времени с шагом $\Delta t = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ с}$
Численная схема конвекции	1) По умолчанию 2) Обобщенная (противопоточно-центральная) с весовым коэффициентом $\alpha = 0.95$ с преобладанием центральной схемы

Тест проведен для относительно низкого значения числа Рейнольдса $Re_\tau = 180$. Здесь

$$Re_\tau = \frac{u_\tau \delta}{\nu},$$

где u_τ – динамическая скорость и δ – полувысота канала. Основные параметры расчета представлены в табл. 1.

В центре расчетной области был установлен датчик для контроля поведения скорости во времени. На рис. 3÷8 показаны: временная

эволюция продольной скорости в точке датчика, осредненное и мгновенное поле скорости, сравнения турбулентных характеристик с результатами работы [6] и параметр Колмогорова (4).

Как видно из приведенных рисунков, STAR-CCM+ позволяет получать пульсационные турбулентные характеристики с приемлемой для инженерных приложений точностью, если используется численная схема конвекции, близкая к центральной. Кроме того,

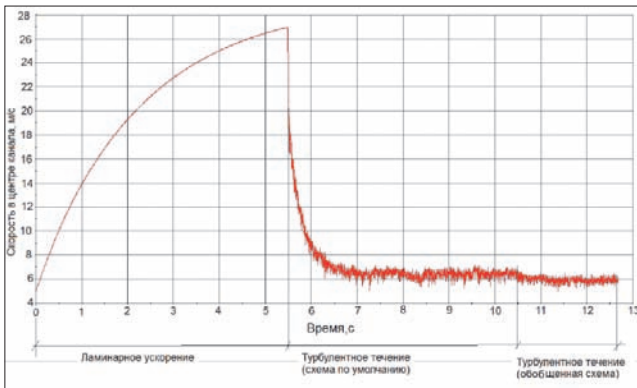


Рис. 3. Временная эволюция продольной скорости в центре канала

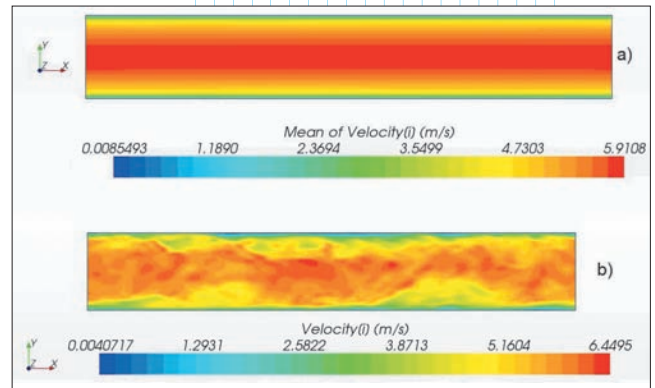


Рис. 4. Осредненное (a) и мгновенное (b) поле скорости

из рис. 8 видно, что условие применимости DNS-метода в принципе выполнено, так как параметр Колмогорова в поле течения не превышает 5 и в среднем в пограничном слое его значение равно примерно $2 \div 3$.

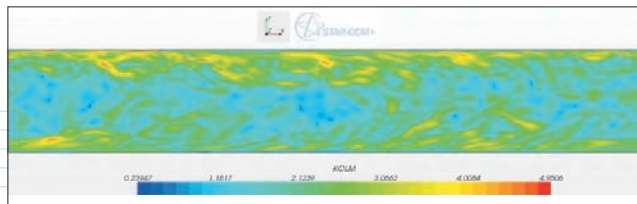


Рис. 8. Параметр Колмогорова (4) (мгновенное поле)

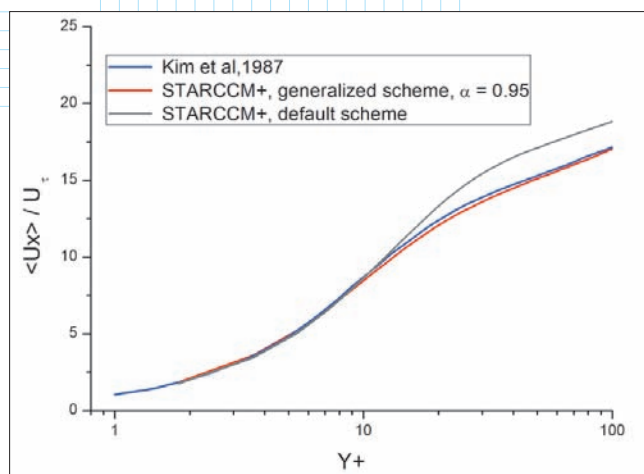


Рис. 5. Осредненный профиль продольной скорости в канале

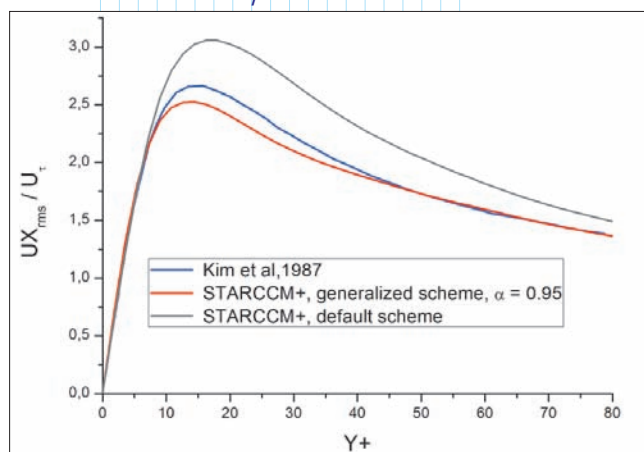


Рис. 6. Среднеквадратичные пульсации продольной скорости

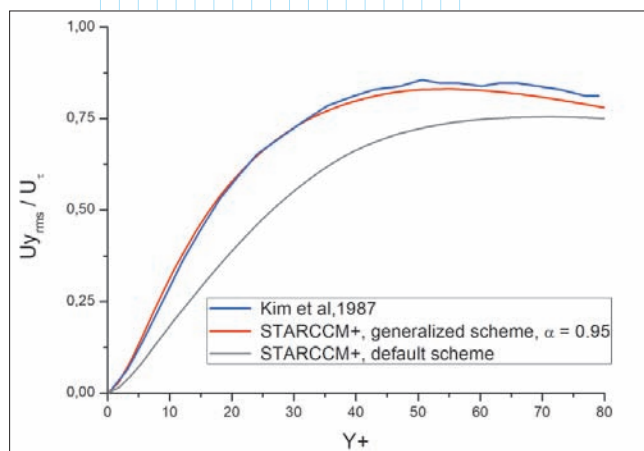


Рис. 7. Среднеквадратичные пульсации поперечной скорости

3. Свободноконвективный теплообмен на вертикальной плоской пластине: сравнение с экспериментом

В работе [10] приведены результаты экспериментального исследования свободной конвекции воздуха около вертикальной пластины. С точки зрения проверки способности кода реалистично моделировать свободноконвективные турбулентные течения с помощью DNS, эта работа интересна тем, что в ней приведены очень подробные экспериментальные данные – не только по теплообмену вдоль пластины, но и распределения средних профилей температуры и скорости и их пульсационных характеристик поперек пограничного слоя на различных уровнях.

Параметры эксперимента были следующие: высота пластины 4 м, ширина 1 м, температура пластины 60°C , температура окружающего воздуха 16°C . Для экономии ресурсов суперкомпьютера в расчетах была рассмотрена вертикальная пластина, имеющая половинную высоту (2.1 м) и ширину 0.7 м. Это можно было сделать, так как ламинарно-турбулентный переход на пластине имел место в диапазоне приблизительно от 0.6 до 1.1 м по высоте. Расчетная сетка содержала 43.75 млн. ячеек: шаг сетки по нормали к стенке (y -координата) пластины был равен 0.2 мм, по вертикали (x -координата) – 4.2 мм и в поперечном направлении – 2.8 мм, шаг по времени – 0.001 с.

В процессе расчета контролировался интегральный тепловой поток на пластину, который после 15 секунд физического времени в среднем стабилизировался на одном уровне. После этого в течение 30 секунд набиралась статистика для расчета осредненных полей и пульсационных характеристик.

На рис. 9 показано сравнение расчетных и экспериментальных данных для осредненного вертикального числа Нуссельта. Дополнительно показана аппроксимация Бейли [3] $Nu_x = 0.1Ra_x^{1/3}$.

Из рис. 9 видно, что имеет место очень хорошее совпадение распределение числа Нуссельта в области ламинарного пограничного слоя. Расчетная область ламинарно-турбулентного перехода также хорошо совпадает с экспериментальной областью перехода. При этом расчетный уровень числа Нуссельта в

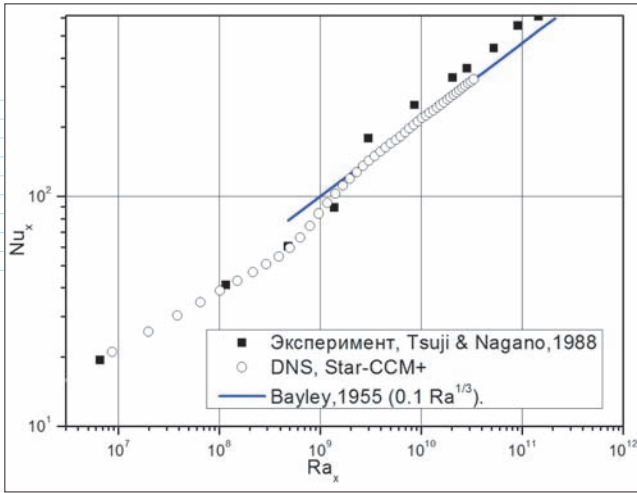


Рис. 9. Распределение числа Нуссельта вдоль пластины: сравнение расчетных и экспериментальных данных

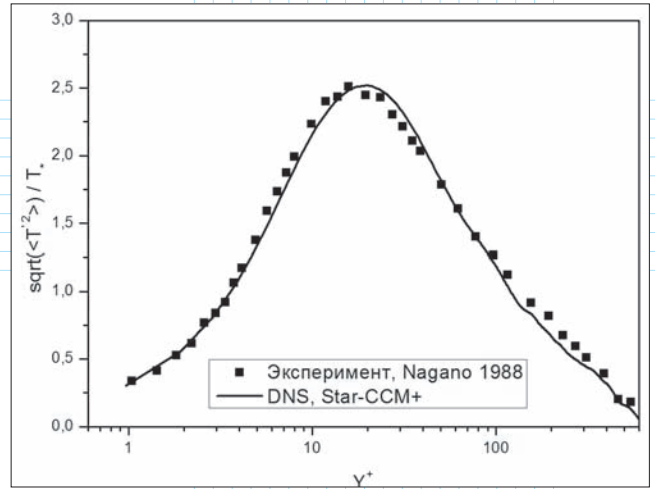


Рис. 12. Профиль среднеквадратичных пульсаций температуры поперек пограничного слоя

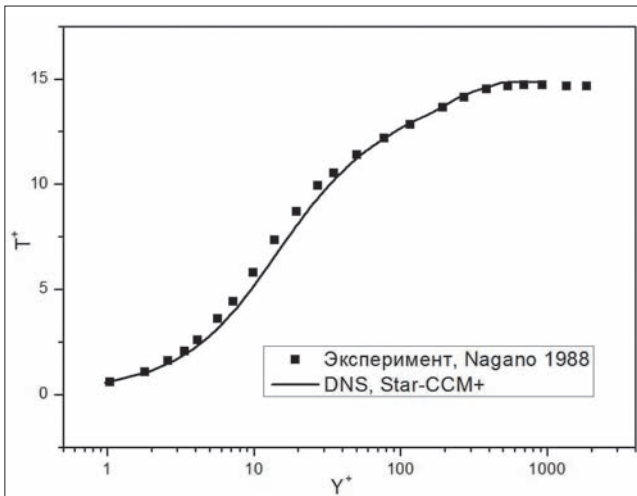


Рис. 10. Профиль температуры поперек пограничного слоя

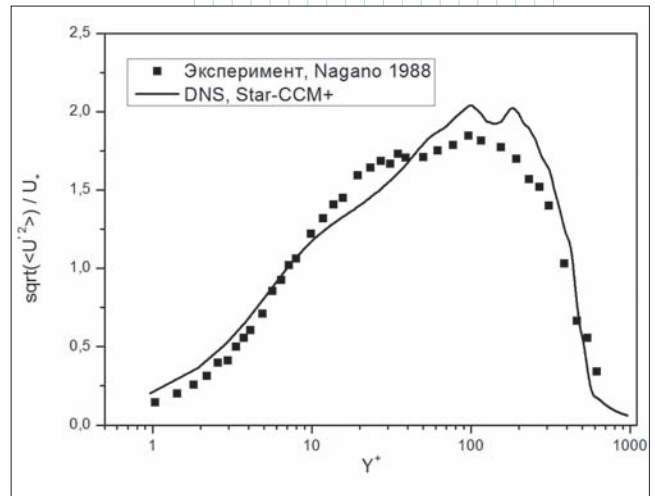


Рис. 13. Профиль среднеквадратичных пульсаций вертикальной скорости поперек пограничного слоя

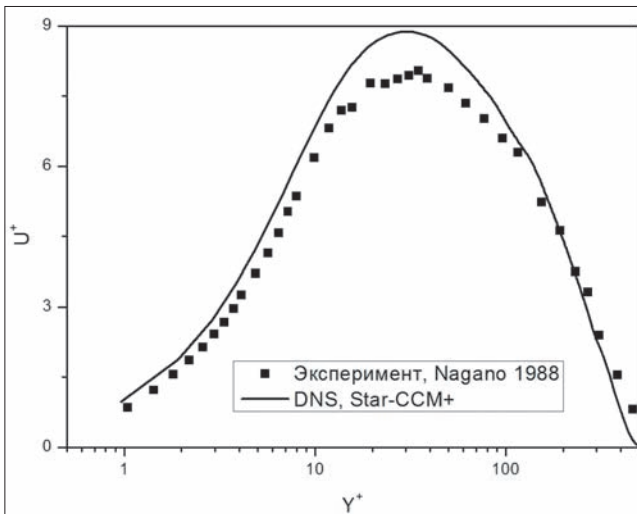


Рис. 11. Профиль вертикальной скорости поперек пограничного слоя

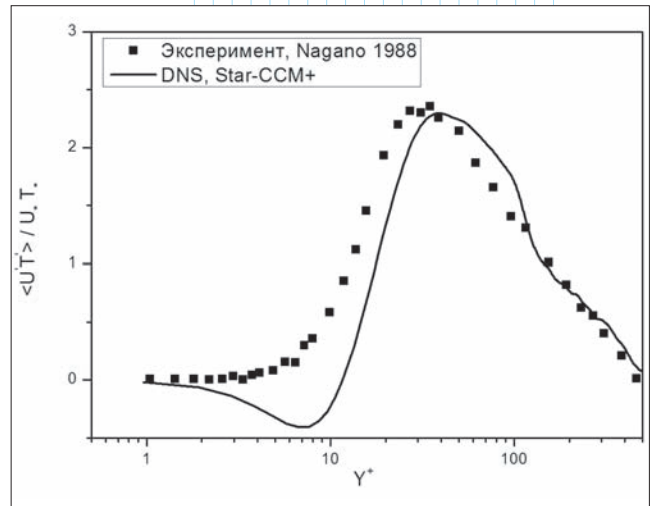


Рис. 14. Профиль безразмерной ковариации пульсаций вертикальной скорости и пульсаций температуры поперек пограничного слоя

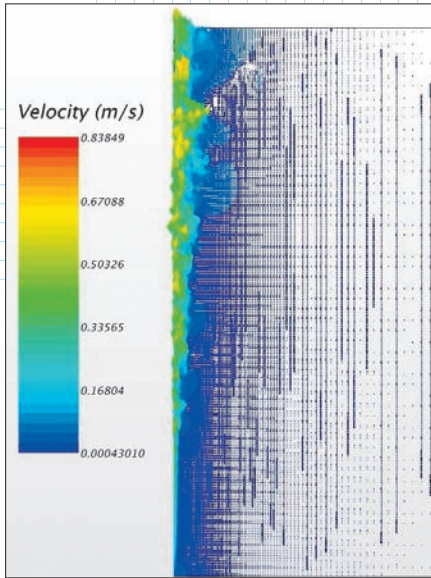


Рис. 15. Мгновенное расчетное поле скорости

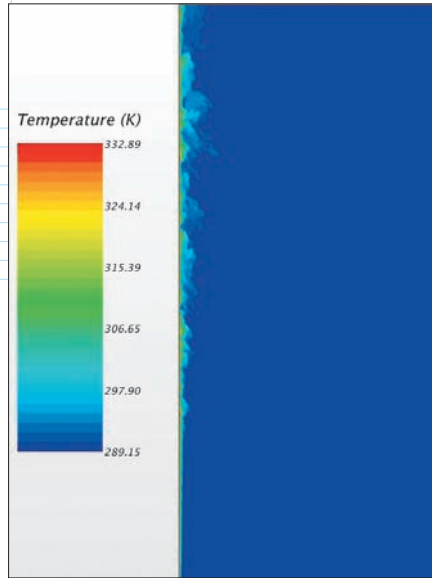


Рис. 16. Мгновенное расчетное поле температуры

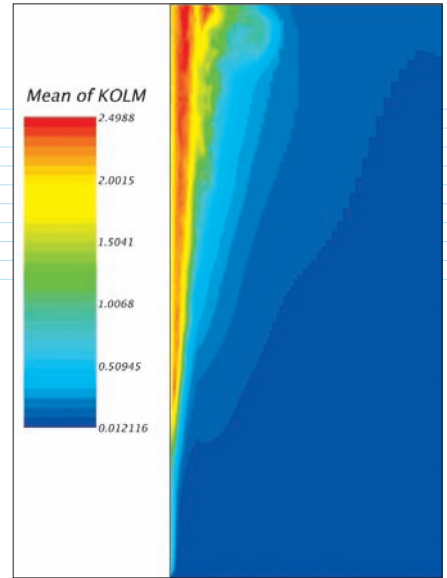


Рис. 17. Осредненное расчетное поле параметра Колмогорова

турбулентной области оказывается систематически ниже экспериментального уровня приблизительно на 20%. Заметим, однако, что при этом расчетное значение числа Нуссельта практически точно совпадает с известной корреляцией Бейли [3], которая в свое время была разработана именно для свободноконвективного турбулентного теплообмена около плоских вертикальных поверхностей.

На рис. 10–14 показаны результаты сравнения расчетных и экспериментальных распределений вертикальной скорости, температуры и их пульсационных характеристик поперек пограничного слоя для уровня, соответствующего числу Рейля $1.55 \cdot 10^{10}$ (высота 1.6 м). Графики приведены для безразмерных параметров:

$$Y^+ = yU_* / \nu, U^+ = U / U_*, T^+ = (T_w - T) / T_*$$

где $U_* = \sqrt{\tau_w / \rho}$ – динамическая скорость, $T_* = q_w / (\rho c_p U_*)$ – динамическая температура, τ_w – трение на стенке, q_w – тепловой поток, ρ – плотность, c_p – теплоемкость при постоянном давлении.

На рис. 15–17 показаны мгновенные и осредненные поля скорости, температуры и среднего параметра Колмогорова, полученные в расчете для эксперимента [10].

Как можно видеть из рисунков, совпадение расчетных и экспериментальных значений (профилей температуры и скорости и их пульсационных характеристик) вполне удовлетворительное, что свидетельствует о правильности полученных при DNS-расчете результатов. Кроме того, как видно из рис. 17, условие (4) применимости DNS в данном случае выполнено (средний параметр Колмогорова в пограничном слое имеет величину порядка 1...2).

4. Свободноконвективный теплообмен на трубах с наружным оребрением

Данный тест основан на результатах работы [1], где было проведено экспериментальное изучение интегральных характеристик теплоотдачи оребренных алюминиевых труб (как газификаторов криогенных жидкостей) при свободной конвекции воздуха. В частности была исследована вертикальная труба с наружным диаметром $d = 36$ мм и длиной $L = 1.4$ м, имеющая 6 ребер высотой $h = 55$ мм. Средняя толщина ребер – 1.5 мм (рис. 18).

Поток испаряющейся криогенной жидкости, текущей по трубе, охлаждал её до температуры T_w , которая измерялась с помощью термопар. Изменение температуры по высоте ребер

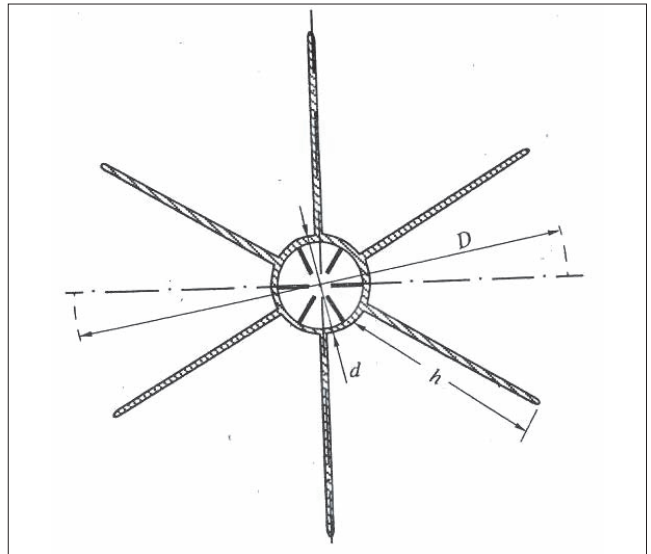


Рис. 18. Сечение трубы с продольными оребрениями

не учитывалось. При расчете средних чисел Нуссельта и Релея за характерный размер была выбрана величина $D = d + 2h$, а теплофизические свойства выбирались по средней температуре. Было проведено несколько экспериментов для различных температур стенки трубы T_w при температуре окружающего воздуха $T_a = 293$ К.

DNS-расчеты в данном случае проводились в приближении Буссинеска. Рассматривалась 1/6 часть трубы между двумя ребрами в виде сектора с углом 60 градусов и наружным радиусом $10D$. Минимальный шаг сетки у стенки по нормали к ней составлял величину около 0.05 мм. По вертикальной координате сетка имела постоянный шаг 2 мм. На стенке ставились условия прилипания с температурой стенки T_w , на боковых границах сектора ставились периодические условия, а на внешней границе сектора – условия свободного втекания/вытекания с наружной температурой воздуха. Такие же граничные условия задавались на нижней и верхней границах расчетной области.

Были проведены три расчета на двух сетках с числом ячеек 13 и 26 млн. и с шагом по времени 0.0025 с для разности температур 38, 57 и 82 градуса, что соответствует числам Релея $1.7 \cdot 10^7$, $2.9 \cdot 10^7$ и $5.3 \cdot 10^7$. В расчетах контролировался интегральный тепловой поток ($P_{1/6}$, Вт) через поверхность 1/6 части трубы, который с течением времени выходил на некоторый квазистационарный уровень. Его среднее значение в течение 5–10 секунд квазистационарного режима использовалось для вычисления расчетного числа Нуссельта по формуле:

$$Nu_{DNS} = \frac{DP_{1/6}}{\Delta T \lambda_{cp} S_{1/6}},$$

где $T = T_a - T_w$, λ_{cp} – коэффициент теплопроводности воздуха при средней температуре $T_{cp} = (T_w + T_a)/2$ и $S_{1/6}$ – площадь поверхности 1/6 части трубы.

Расчетные и экспериментальные данные для среднего числа Нуссельта сравниваются на рис. 19.

Как мы видим, результаты численных DNS-расчетов лежат несколько ниже экспериментальных значений, при этом максимальная ошибка (39%) имеет место при минимальном числе Релея, а минимальная ошибка (11%) – при его максимальном значении. Как показали расчеты, при самом низком числе Релея весь пограничный конвективный слой на трубе имеет ламинарный характер. При среднем числе Релея появляется турбулентный участок, занимающий около 30% всей длины. При максимальном значении числа Релея этот участок возрастает приблизительно до 75%. Таким образом, рассмотренный

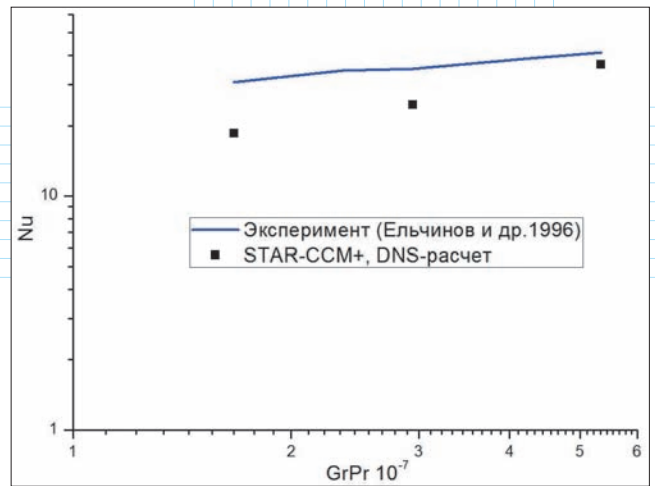


Рис. 19. Среднее число Нуссельта для ребренной трубы: сравнение расчетных и экспериментальных данных

диапазон чисел Релея для данной трубы лежит в переходной области. Относительно большая ошибка для невысоких значений чисел Релея (39%) может быть обусловлена либо неспособностью численной модели точно определить точку ламинарно-турбулентного перехода, либо какими-то неучтенными особенностями эксперимента, ускоряющими турбулентный переход пограничного слоя. Однако, в заведомо турбулентной области разница расчетных и экспериментальных данных вполне сопоставима с ошибкой экспериментальных измерений (порядка 10%).

Расчеты на двух разных сетках с числом ячеек 13 и 26 миллионов показали, что разница численных результатов не превышает 2–3 %, так что сходимость по сетке в расчетах имела место. На рис. 20 показаны мгновенные температурные поля в продольном сечении для различных чисел Релея.

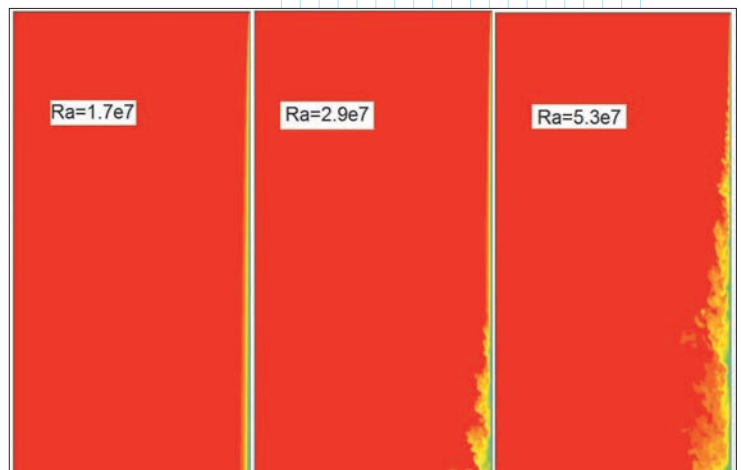


Рис. 20. Мгновенные расчетные поля температур в продольном сечении для различных чисел Релея (поток движется вниз)

5. Свободноконвективный теплообмен на цилиндре

Условия для данного теста были выбраны близкими к условиям работы [4], где приведено описание экспериментального изучения свободноконвективного теплообмена около вертикального цилиндра с небольшим отношением высоты к диаметру ($L / D = 2$).

Расчет был проведен для следующих условий: цилиндр высотой 280 мм и диаметром 140 мм, газ – азот, температура окружающей среды 100 К, температура стенки цилиндра 140 К. Сетка содержала 43 миллиона ячеек, минимальный шаг по нормали к стенке – 0.05 мм, шаг по высоте цилиндра – 0.7 мм, наружный радиус расчетной области – 280 мм. Шаг по времени – 0.001 с. Число Рейля для данного случая: $Ra_a = 5.76 \cdot 10^9$.

В процессе расчета контролировался интегральный тепловой поток через боковую поверхность цилиндра P . После достижения квазистационарного состояния эта величина была осреднена по времени в течение 10 секунд и оказалась равной $P = 37.87$ Вт. На основании этого значения среднее число Нуссельта оказывается равным $Nu_{DNS} = 179.4$, что довольно хорошо совпадает с корреляцией Бейли [3]: $Nu_{БЕЙЛИ} = 179.0$.

Мгновенное поле температур в продольном сечении показано на рис. 21.

На рис. 22 отображено осредненное распределение локального числа Нуссельта вдоль поверхности цилиндра в зависимости от локального числа Рейля, полученное в DNS-расчете.

В работе [5] диапазон чисел Рейля ламинарно-турбулентного перехода указан как $3.8 \cdot 10^8 \dots 1.6 \cdot 10^9$. Этот интервал на рисунке показан вертикальными линиями. Видно, что расчетный ламинарно-турбулентный переход, полученный в результате расчета, неплохо

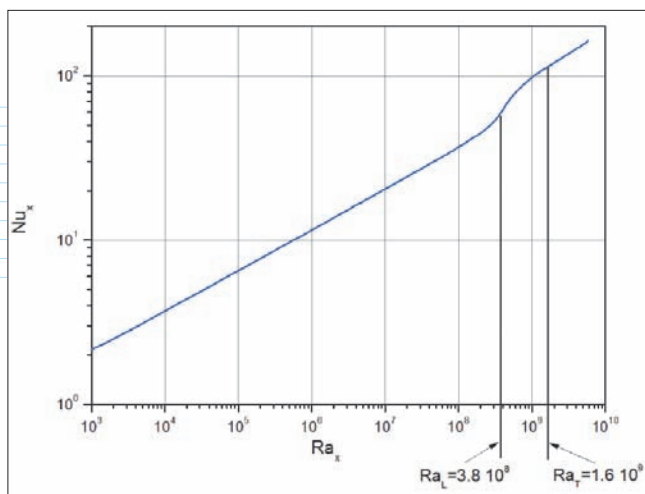


Рис. 22. Распределение осредненного локального числа Нуссельта вдоль цилиндра, полученное в результате расчета

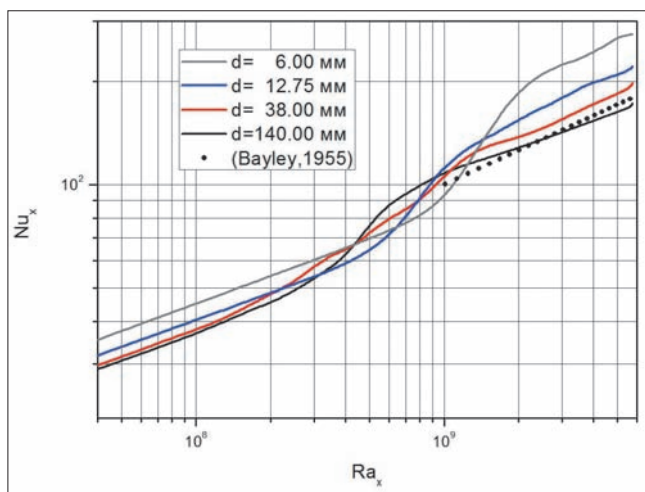


Рис. 23. Распределение числа Нуссельта вдоль вертикальной координаты: сравнение цилиндров различного диаметра

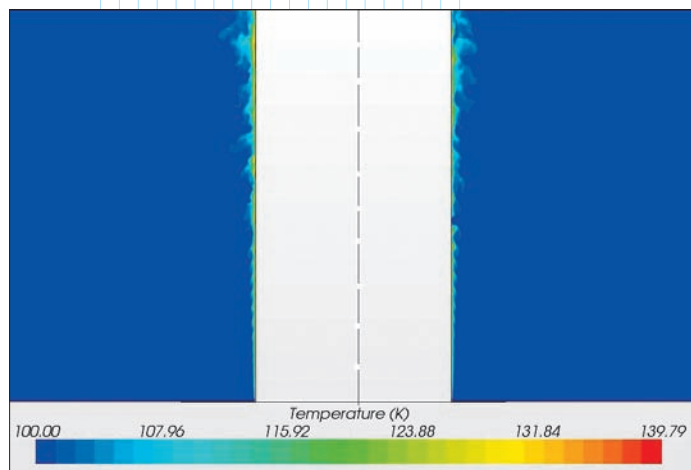


Рис. 21. Мгновенное поле температур в продольном сечении цилиндра

соответствует этим данным. Для исследовательских целей были выполнены еще три расчета при тех же условиях, но отличающихся одним параметром – диаметром цилиндра. На рис. 23 показано распределение числа Нуссельта для цилиндров с различными диаметрами.

На рис. 24 показаны расчетные поля температур для цилиндров с различными диаметрами.

6. Заключение

Как показывают приведенные тесты, пакет STAR-CCM+ вполне можно применять для проведения прямого численного моделирования (DNS) турбулентных течений для невысоких значений чисел Рейнольдса, хотя формально такая опция (по крайней мере, в

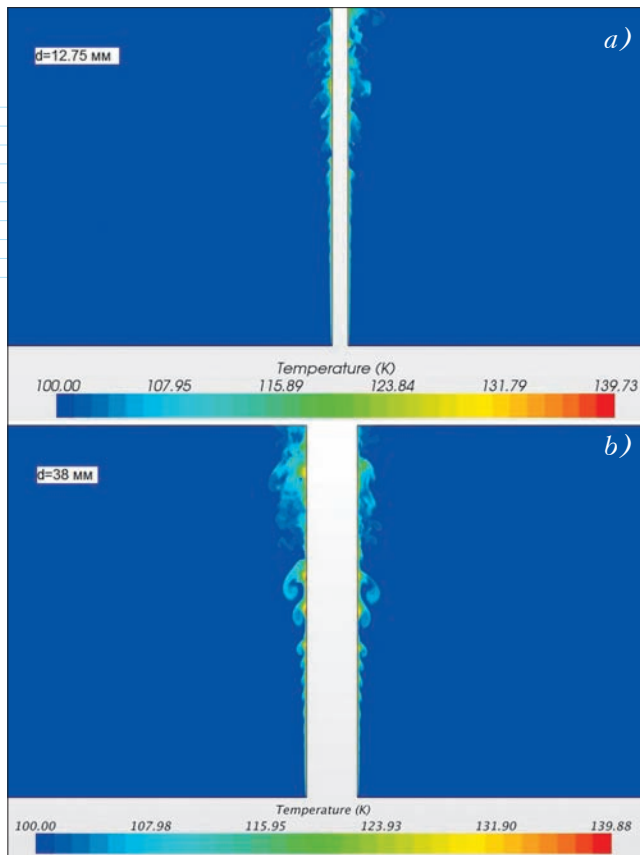


Рис. 24. Мгновенное поле температур в продольном сечении цилиндров с диаметрами 12.75 мм (а) и 38 мм (б)

9-й версии) не предусмотрена. Для её реализации необходимо задать ламинарную физическую модель (без использования какого-либо моделирования турбулентности) и обобщенную разностную схему с весовым фактором, равным 1, соответствующим строго центрально-симметричной разностной схеме (такая возможность раскрывается с помощью специального макроса). Далее следует задать второй порядок точности по времени и выбрать подходящий шаг по времени, равный обратной величине максимальной частоты турбулентных пульсаций, которые желательны явно описать в решении. Характерный размер ячейки расчетной сетки при этом должен удовлетворять соотношению (4).

Хотя солвер *STAR-CCM+* не всегда сохраняет кинетическую энергию в бездиссипативном течении с приемлемой точностью, тем не менее, он способен правильно описать распад крупных вихрей на более мелкие в турбулентном потоке, что уже дает принципиальную возможность проводить *DNS*-расчеты. В задачах естественной конвекции эта неконсервативность кинетической энергии, по-видимому, приводит к систематической

недооценке тепловых потоков на 10÷20%. Заметим, однако, что во всех случаях это именно недооценка, в то время как *RANS*-моделирование может приводить к непредсказуемому знаку ошибки по тепловому потоку (как к недооценке, так и переоценке). В этом и состоит существенное преимущество *DNS*-моделирования, позволяющего всегда быть уверенным в том, что полученный при расчете (например, теплообменного аппарата) тепловой поток заведомо не больше истинной величины. ☺

Литература

1. Ельчинов В.П., Зюзин А.П., Кирпиков В.А., Федотов В.И. Теплоотдача от оребренных труб при свободном движении воздуха. // Теоретические основы химической технологии, 1996, т. 30, № 2, с. 217-220.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Том 6. Гидродинамика. Москва: Наука, 1986, 736 с.
3. Bayley F.J. *An analysis of turbulent free-convection heat transfer* // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 1955, Vol. 169, No. 20, p. 361.
4. Clausing A.M., Kempka S.N. *The influences of property variations on natural convection from vertical surfaces* // Journal of Heat Transfer, 1981; Vol. 103, No. 4, pp. 609–612.
5. Clausing A.M. *Natural convection correlations for vertical surfaces including influences of variable properties* // Journal of Heat Transfer, 1983, Vol. 105, No. 1, pp. 138–143.
6. Kim J., Moin P., Moser R. *Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number* // Journal of Fluid Mechanics, 1987, Vol. 177, pp. 133–166.
7. Morinishi Y., Lund T.S., Vasilyev O.V., Moin P. *Fully conservative higher order finite difference schemes for incompressible flow* // Journal of Computational Physics, 1998, Vol. 143, pp. 90–124.
8. Moulinec C., Benhamadouche S., Laurence D., Peric M. *LES in U-bend pipe meshed by polyhedral cells* // Engineering Turbulence Modelling and Experiments 6. Oxford: Elsevier, 2005, pp. 237–246.
9. Piacsek S.A., Williams G.P. *Conservation properties of convection difference schemes* // Journal of Computational Physics, 1970, Vol. 6, pp. 392–405.
10. Tsuji T., Nagano Y. *Characteristics of a turbulent natural convection boundary layer along a vertical flat plate* // International Journal of Heat and Mass Transfer, 1988, Vol. 31, No. 8, pp. 1723–1734.